

# Το ημίτονο: ανιχνεύοντας την ετυμολογία

Γιάννης Θωμαΐδης – Μαλβίνα Παπαδάκη

## Μια μικρή ιστορία

Ο Ηλίας και ο Στέφανος είναι παιδικοί φίλοι και συμμαθητές στη Β' Γυμνασίου. Μένουν στην ίδια πολυκατοικία, κάθονται στο ίδιο θρανίο και παίζουν ποδόσφαιρο στην ίδια ομάδα. Δεν θα μπορούσε να τους χαρακτηρίσει κανείς άριστους μαθητές· αν μάλιστα ενδιαφερόταν να μάθει, θα διαπίστων ότι δείχνουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον για την προπόνηση, τη μουσική και το διαδίκτυο παρά για το σχολείο. Στα μαθήματα της Α' τάξης δεν αντιμετώπιζαν ιδιαίτερες δυσκολίες, με αποτέλεσμα να θεωρήσουν ότι το Γυμνάσιο είναι εύκολη υπόθεση, να ρίξουν μεγαλύτερο βάρος στις προπονήσεις και να αυξήσουν τις ώρες των διαδικτυακών περιπλανήσεων. Τα προβλήματα με το σχολείο άρχισαν στο πρώτο τρίμηνο της Β' τάξης, όταν εμφανίστηκαν οι πρώτες χαμηλές επιδόσεις σε κάποια τεστ και μια παταγώδης αποτυχία στο επαναληπτικό διαγώνισμα των Μαθηματικών.

Οι απαράδεκτα χαμηλοί βαθμοί στον Έλεγχο του πρώτου τριμήνου και οι αυστηρές προειδοποιήσεις των καθηγητών προκάλεσαν αναστάτωση στους γονείς τους, η οποία φυσικά μεταφέρθηκε το ίδιο βράδυ στο σπίτι. Οι επιπλήξεις συνοδεύτηκαν από την απειλή άμεσης διακοπής των προπονήσεων και απαγόρευση της χρήσης του υπολογιστή, αφού αυτά τα δύο θεωρήθηκαν ότι φταίνε για τις χαμηλές επιδόσεις στο σχολείο.

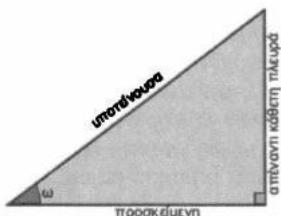
Μπροστά στον κίνδυνο, ο Ηλίας και ο Στέφανος έδωσαν μεγάλες υποσχέσεις ότι η κατάσταση θα βελτιωθεί στο δεύτερο τρίμηνο και παρακάλεσαν να αναβληθεί προσωρινά η απόφαση ότι θα σταματήσουν το ποδόσφαιρο. Συμφωνήθηκε τελικά να μειωθούν οι προπονήσεις σε μία την εβδομάδα και να περιοριστεί η χρήση του υπολογιστή μόνο για ένα δίωρο το Σάββατο. Για να δείξουν μάλιστα έμπρακτα τη διάθεση αλλαγής αποφάσισαν να μελετούν μαζί τα μαθήματά τους κάθε απόγευμα, βοηθώντας ο ένας τον άλλο.

Έτσι, άρχισαν να ασχολούνται συστηματικά με τα Μαθηματικά, το μάθημα στο οποίο είχαν τους χαμηλότερους βαθμούς. Όταν μάλιστα ο καθηγητής των Μαθηματικών κύριος Ευσταθίου προειδοποίησε ότι στο νέο κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας θα γράψουν το επαναληπτικό διαγώνισμα του δευτέρου τριμήνου, έπεσαν με τα μούτρα στο διάβασμα.

Ένα απόγευμα προσπαθούσαν να λύσουν μια άσκηση που είχε σχεδιασμένα διάφορα ορθογώνια τρίγωνα, στα οποία έπρεπε να μετρήσουν τα μήκη των πλευρών και να υπολογίσουν το ημίτονο και το συνημίτονο κάθε οξείας γωνίας.

«Εγώ αυτά τα ημίτονα και τα συνημίτονα δεν τα καταλαβαίνω» είπε ο Ηλίας, δείχνοντας με το δάκτυλο τον ορισμό του ημιτόνου στη σελίδα 142 του βιβλίου Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου:

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ως ενός ορθογώνιου τρίγωνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται ημίτονο της γωνίας ω.



«Οταν μετρήσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά και την υποτείνουσα και διαιρέσουμε τα δύο μήκη, θα βρούμε σίγουρα έναν αριθμό» (Σχήμα 1) συνέχισε. «Αυτός φαίνεται ότι έχει κάποια σχέση με το άνοιγμα της οξείας γωνίας, αφού σε ένα άλλο ορθογώνιο τρίγωνο με διαφορετική γωνία ω θα βρούμε διαφορετικό αριθμό. Γιατί όμως γράφει ότι είναι πάντοτε σταθερός; Άλλα εκείνο που με μπερδεύει περισσότερο είναι το όνομα: Γιατί αυτός ο αριθμός ονομάζεται ημίτονο;»

## Σχήμα 1

«Σταθερός είναι στα ορθογώνια τρίγωνα που έχουν την ίδια οξεία γωνία ω» απάντησε ο Στέφανος. «Και το ημίτονο μου θυμίζει το ημίχρονο, όπως στο ποδόσφαιρο που το καθένα είναι 45 λεπτά. Κάποιο μισό θα υπάρχει και στο ημίτονο».

«Εγώ ξέρω και το ημίτονο της μουσικής» συμπλήρωσε ο Ηλίας, που είχε ξεκινήσει κάποτε μαθήματα αρμονίου στο Δημοτικό Ωδείο. «Είναι το μισό διάστημα ανάμεσα σε δύο συνεχόμενες νότες και το καταλαβαίνεις από τον ήχο. Πάλι το μισό δηλαδή. Έχει άραγε καμιά σχέση το ημίτονο με το ημιτόνιο; Εγώ δεν βλέπω νότες ούτε ακούω μουσική στα ορθογώνια τρίγωνα!».

## Το ημίτονο: ανιχνεύοντας την ετυμολογία

Πιο αργά το βράδυ, πριν πάει για ύπνο, ο φιλοπεριέργος Ηλίας έκανε μια ακόμη προσπάθεια να βρει απάντηση στο ερώτημα που τον απασχολούσε. Διάβασε το εισαγωγικό σημείωμα «Τι είναι η Τριγωνομετρία;» στο αντίστοιχο κεφάλαιο του βιβλίου Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου. Εκεί βρήκε αρκετά ιστορικά στοιχεία αλλά καμιά πληροφορία για την προέλευση του όρου «ημίτονο». Συνέχισε να ξεφυλλίζει το βιβλίο και στη σελίδα 147 τράβηξε την προσοχή του η πληροφορία ότι για να υπολογίσουμε το ημίτονο μιας γωνίας με τον επιστημονικό υπολογιστή τσέπης, χρησιμοποιούμε το πλήκτρο **sin**.

«Τι είναι πάλι αυτό το **sin**» αναρωτήθηκε. «Άνυριο να θυμηθώ να ρωτήσω στο σχολείο τον Ευσταθίου».

Την άλλη μέρα ο καθηγητής Μαθηματικών απουσίαζε και στην ώρα του το τμήμα του Ηλία και του Στέφανου είχε «κενό». Οι περισσότεροι μαθητές βγήκαν στην αυλή για να παίξουν ποδόσφαιρο ή μπάσκετ, αλλά ο Ηλίας, προς μεγάλη έκπληξη του Στέφανου, αποφάσισε να εγκατασταθεί στην αίθουσα της σχολικής βιβλιοθήκης και να μελετήσει τα λεξικά και τις εγκυκλοπαίδειες. Είχε μεγάλη περιέργεια να μάθει τι έγραφαν για το ημίτονο και το **sin**. Στη βιβλιοθήκη μάλιστα ήταν υπεύθυνος ένας άλλος μαθηματικός του σχολείου, ο κύριος Συμεωνίδης, ο οποίος για λόγους υγείας είχε απαλλαγή από τα διδακτικά καθήκοντα.

Πάνω στο γραφείο του κυρίου Συμεωνίδη υπήρχε ένας επιστημονικός υπολογιστής τσέπης και ο Ηλίας τον ρώτησε για τη σημασία του πλήκτρου **sin**.

«Είναι συντομογραφία της αγγλικής λέξης **sine**, που σημαίνει ημίτονο» απάντησε ο καθηγητής. «Έχετε αρχίσει το κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας;»

«Πριν λίγες μέρες» απάντησε ο Ηλίας «και θέλω να καταλάβω καλά όλες τις έννοιες. Στη βιβλιοθήκη ήρθα για να λύσω κάποιες απορίες. Λέω να ξεκινήσω από τα λεξικά και να μελετήσω τι γράφουν για τη λέξη ημίτονο».

«Πολύ καλά έκανες!» απάντησε ο καθηγητής, που δεν παρατηρούσε συχνά παρόμοιες επισκέψεις μαθητών στη βιβλιοθήκη. «Αν έχεις κάποια δυσκολία, μη διστάσεις να με ρωτήσεις».

### Αναζήτηση υλικού στη σχολική βιβλιοθήκη και το διαδίκτυο

Από το ράφι με τα λεξικά ο Ηλίας κατέβασε το *Ετυμολογικό Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας* του Γ. Μπαμπινιώτη, διάβασε όσα έγραφε στη σελίδα 546 για το λήμμα «ημίτονο» και σημείωσε στο τετράδιο του τα εξής:

**ημίτονο: ημί + τόνο(ς)** (στην αρχική σημασία «ταινία, σχοινί», ουδέτερο κατά τον αρχαίο μουσικό όρο **ημιτόνιον** «μισός τόνος», που απαντά στον Αριστούρο τον 4<sup>ο</sup> αιώνα π.Χ.), απόδοση του γαλλικού **sinus** (λατινικά **sinus** «πτυχή ενδύματος, καμπύλη»), που χρησιμοποιήθηκε ως μαθηματικός όρος για να αποδώσει το αραβικό **djaub** «πτυχή ενδύματος – μισή χορδή».

Όταν έδειξε τις σημειώσεις στον κύριο Συμεωνίδη αυτός του σύστησε να μελετήσει και το λήμμα **«sine»** από ένα ξενόγλωσσο λεξικό. Ο Ηλίας κατέβασε από το ράφι το ογκώδες *Oxford Universal Dictionary*, βρήκε στη σελίδα 1898 το λήμμα **«sine»** και με τη βοήθεια του κυρίου Στεφανίδη μετέφρασε στο τετράδιο τα εξής:

**Sine:** Από το Λατινικό **sinus** που σημαίνει γύρισμα, καθώς και πτυχή υφάσματος. Χρησιμοποιήθηκε ως μετάφραση του συνώνυμου Αραβικού **jaib**, που εφαρμόζεται στα Μαθηματικά με τη σημασία του 2 παρακάτω.

1. **Μυχός ή κόλπος.**

2. **Mía από τις τρεις θεμελιώδεις τριγωνομετρικές συναρτήσεις:** Αρχικά, ήταν το μήκος ενός ευθύγραμμου τιμήματος με αρχή το άκρο ενός κυκλικού τόξου, παράλληλο προς την εφαπτομένη στο άλλο άκρο, και τέρμα στην ακτίνα. Στη νεώτερη εποχή είναι ο λόγος αυτού του τιμήματος προς την ακτίνα, ή (ισοδύναμα, ως συνάρτηση μιας γωνίας), ο λόγος της πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου που βρίσκεται απέναντι της δοθείσας γωνίας προς την υποτείνουσα (με το ημίτονο μιας αμβλείας γωνίας να είναι αριθμητικά ίσο με αυτό της παραπληρωματικής της). (Συντομογραφικά **sin**)

«Εδώ υπάρχει ένα ζήτημα» είπε σκεπτικός ο κύριος Συμεωνίδης παρατηρώντας και τα δύο κείμενα. «Φαίνεται ότι η λέξη ημίτονο είναι μετάφραση μιας άλλης μετάφρασης. Πρώτα μεταφράστηκε στα Λατινικά ως **sinus** η αραβική λέξη **djaub** ή **djaib** που έχει διάφορες σημασίες και μάλιστα, όπως γράφει ο Μπαμπινιώτης, σημαίνει επίσης μισή χορδή. Υστερά μεταφράστηκε στα Ελληνικά η λατινική λέξη **sinus** ως ημίτονο». Στράφηκε με νόημα τον Ηλία. «Λοιπόν, παρατηρείς ότι συμβαίνει κάτι παράξενο;»

«Εγώ παρατηρώ ότι ημίτονο σημαίνει μισή χορδή, και έτσι εξηγείται το ημι. Ο τόνος μάλλον θα έχει κάποια σχέση με τη χορδή» απάντησε ο Ηλίας.

«Καλά, και η χορδή τι σχέση έχει;» ρώτησε ο κύριος Συμεωνίδης.

«Μάλλον εννοεί χορδή μουσικού οργάνου, όπως στη κιθάρα ή το βιολί, οπότε έχει σχέση και με το

---

### Το ημίτονο: ανιχνεύοντας την ετυμολογία

---

ημιτόνιο της μουσικής».

Ο κύριος Συμεωνίδης τον κοίταξε επιτιμητικά. «Προηγουμένως μου είπες ότι έχεις απορίες στην Τριγωνομετρία, όχι στη Μουσική! Μιλήσατε καθόλου για χορδές στην Τριγωνομετρία;»

«Η τριγωνομετρία ασχολείται με τρίγωνα, το λέει και η λέξη» απάντησε λίγο συγχυσμένος ο Ηλίας. «Τα τρίγωνα έχουν πλευρές, δεν έχουν χορδές όπως οι κύκλοι!».

«Αυτό ακριβώς είναι το παράξενο που θέλω να καταλάβεις. Αν το ημίτονο έχει σχέση με τη χορδή, τότε συνδέεται με τον κύκλο και όχι με το ορθογώνιο τρίγωνο, όπως ορίζεται στο σχολικό βιβλίο. Εξάλλου το Oxford αναφέρει για κυκλικό τόξο, εφαπτομένη και ακτίνα».

Ο Ηλίας παραδέχθηκε ότι ο κύριος Συμεωνίδης είχε δίκιο. Η κατάσταση με το ημίτονο άρχισε να γίνεται περίπλοκη.

«Εσείς κύριε, ξέρετε τι ακριβώς συμβαίνει;»

«Νομίζω ότι ξέρω» απάντησε ο κύριος Συμεωνίδης. «Αλλά χρειάζεται να ψάξουμε λίγο περισσότερο.

Ζήτησε από τον Ηλία να καθίσει δίπλα του στο γραφείο και άνοιξε τον υπολογιστή της βιβλιοθήκης.

«Μπορούμε να βρούμε κάτι για το ημίτονο, ή καλύτερα για το sine στο διαδίκτυο. Ξέρεις να ψάχνεις;».

«Θα γράψουμε sine στην αναζήτηση του Google» απάντησε σε χρόνο μηδέν ο Ηλίας.

Ψηλά στην οθόνη εμφανίστηκε το μήνυμα

Περίπου 145.000.000 αποτελέσματα (0.48 δευτερόλεπτα)

Το πρώτο αποτέλεσμα στη λίστα έγραφε:

#### Sine – Wikipedia, the free encyclopedia

Ο Ηλίας άνοιξε το σύνδεσμο, έκανε scroll στη σελίδα και η οθόνη πλημμύρισε από κείμενα, σχήματα, γραφικές παραστάσεις, κινούμενες καμπύλες, πολύπλοκους μαθηματικούς τύπους και δεκάδες παραπομπές με υπερσυνδέσεις.

«Πρόσεξε να μην χαθείς εδώ μέσα!» προειδοποίησε ο κύριος Συμεωνίδης. «Πήγαινε στα περιεχόμενα και εντόπισε αυτό ακριβώς που ψάχνουμε.»

Ο μακρύς πίνακας περιεχομένων είχε 17 ενότητες με πολλές υποενότητες και ο Ηλίας με δυσκολία, διαβάζοντας έναν – έναν τους τίτλους, κατέληξε σε αυτή που έμοιαζε να είναι η πιο σχετική με το θέμα τους. Ήταν η υποενότητα 13.1 με τίτλο «Etymology».

«Λοιπόν Ηλία, άκου τι θα κάνουμε. Σε λίγο θα χτυπήσει το κουδούνι. Κάνε γρήγορα επαλογή και εκτύπωση αυτής της υποενότητας. Εγώ θα ψάξω στα περιοδικά της βιβλιοθήκης μια εργασία για την ιστορία της Τριγωνομετρίας που είχα διαβάσει πριν από χρόνια. Νομίζω ότι είχε αρκετές πληροφορίες για το θέμα μας.»

Ο Ηλίας κρατούσε σε λίγα λεπτά το εκτυπωμένο κείμενο της Wikipedia που έγραφε τα εξής:

*Etymologically, the word sine derives from the Sanskrit word for chord, jiva (jya being its more popular synonym). This was transliterated in Arabic as jiba abbreviated jb . Since Arabic is written without short vowels, "jb" was interpreted as the word jaib, which means "bosom", when the Arabic text was translated in the 12th century into Latin by Gerard of Cremona. The translator used the Latin equivalent for "bosom", sinus (which means "bosom" or "bay" or "fold"). The English form sine was introduced in the 1590s.*

Ο κύριος Συμεωνίδης έφτασε κρατώντας ένα τεύχος του περιοδικού **Μαθηματική Επιθεώρηση** και έκανε αντίγραφα μερικών σελίδων στο φωτοτυπικό της βιβλιοθήκης.

«Λοιπόν Ηλία, θα μελετήσεις στο σπίτι όλες τις σημειώσεις που κράτησες καθώς και την εργασία που φωτοτύπησα. Αυτή είναι μάλλον δύσκολη για τις γνώσεις σου, αλλά αν σταθείς στα σημεία που έχει σχήματα θα καταλάβεις με λίγη προσπάθεια τι σημαίνουν. Στη συνέχεια προσπάθησε να γράψεις ένα κείμενο για τη σημασία της λέξης ημίτονο, σημείωσε όποιες απορίες έχεις και έλα μια από τις επόμενες μέρες να το εξετάσουμε μαζίν.»

«Θα τα μελετήσω μαζί με το φίλο μου το Στέφανο, που έχει τις ίδιες απορίες» απάντησε ο Ηλίας και έφυγε γρήγορα για να προλάβει το μάθημα της επόμενης ώρας.

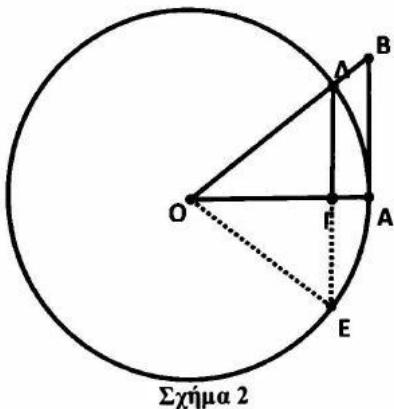
#### Το ημίτονο: μια πρώτη ιστορική ανάγνωση

Το ίδιο βράδυ, μετά το διάβασμα, ο Ηλίας και ο Στέφανος άπλωσαν τις σημειώσεις στο τραπέζι και άρχισαν να εξετάζουν προσεκτικά όλα τα στοιχεία. Η έρευνά τους έφερε πλούσια αποτελέσματα. Μελετώντας τα σχήματα που υπήρχαν στην εργασία της **Μαθηματικής Επιθεώρησης** δημιουργήσαν το επόμενο σχήμα που ταίριαζε με όσα έγραφε το *Oxford Universal Dictionary*:

---

### Το ημίτονο: ανιχνεύοντας την ετυμολογία

---



Σχήμα 2

«Μας τα μπερδεύει κάπως αυτή η ΟΔ στον παρονομαστή· εκτός από υποτείνουσα είναι και ακτίνα του κύκλου» παραδέχτηκε ο Ηλίας.

«Εμένα με μπερδεύουν πολλά. Για ποιο λόγο έδωσαν τόση σημασία στη μισή χορδή, ακόμη και ειδικό όνομα;».

«Επειδή αυτά τα χρησιμοποιούσαν στην αρχαιότητα οι αστρονόμοι· σε πολύ μακρινές αποστάσεις το τόξο ΔΑ μπορεί να ταυτιστεί με το τμήμα ΔΓ».

«Ακόμη πιο καλά όμως το τόξο μπορεί να ταυτιστεί με τη δική του χορδή, τη ΔΑ. Γιατί πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη μισή χορδή του διπλάσιου τόξου;»

«Μάλλον θα είναι πιο εύκολος ο υπολογισμός» απάντησε ο Ηλίας. «Αλλά προτείνω να διαβάσουμε πιο συστηματικά την εργασία της **Μαθηματικής Επιθεώρησης**. Ισως βρούμε εκεί κάποια απάντηση».

Στην εργασία υπήρχαν πολλές πληροφορίες για τον **Κλαδύτο Πτολεμαίο**, μεγάλο αστρονόμο, γεωγράφο και μαθηματικό που άκμασε στην Αλεξανδρεία τον 2<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα. Δεν γνωρίζουμε πολλά για τη ζωή του εκτός ότι έζησε στην Αλεξανδρεία, το πολιτιστικό κέντρο της ελληνιστικής εποχής την περίοδο 85–165 μ.Χ. Έγραψε το σπουδαίο έργο **Μεγίστη Μαθηματική Σύνταξις ή Αλμαγέστη** όπως έχει μείνει γνωστό από τον τίτλο της Αραβικής μετάφρασης. Αποτελείται από 13 βιβλία και είναι κυρίως έργο αστρονομίας με θεωρίες, πίνακες και υπολογισμούς για τα ουράνια φαινόμενα.

Διάβασαν επίσης ότι ο Ίππαρχος πριν από τον Πτολεμαίο, στην προσπάθειά του να υπολογίσει αποστάσεις μεταξύ αστέρων συνέταξε έναν πίνακα όπου σε κάθε γωνία αντιστοιχούσε το μήκος της χορδής δταν η γωνία γινόταν επίκεντρη. Αυτό τον πίνακα χρησιμοποίησε αργότερα ο Πτολεμαίος στην **Αλμαγέστη** και έτσι διασώθηκε.

«Να λοιπόν, αυτό που έλεγα!» φώναξε θριαμβευτικά ο Στέφανος. «Οι χορδές αποτελούν καλύτερη προσέγγιση των τόξων, όχι οι μισές χορδές των διπλάσιων τόξων. Το είπε και ο Ίππαρχος!».

«Για να δούμε τι γράφει παρακάτω» είπε ανυπόμονος ο Ηλίας.

Οι πληροφορίες που υπήρχαν στην εργασία ταίριαζαν με το κείμενο της Wikipedia και άρχισαν να ξετυλίγουν σιγά-σιγά το νήμα που συνδέει τις χορδές με τα ημίτονα. Μετά του αρχαίους Έλληνες, οι Ινδοί θεώρησαν ότι οι αστρονομικοί υπολογισμοί διευκολύνονται σημαντικά αν αντί για τη χορδή ενός τόξου χρησιμοποιθεί το μισό της χορδής του διπλάσιου τόξου. Ονόμασαν λοιπόν τη μισή χορδή **«ardhajīva»** (από τις λέξεις *ardha* = μισό και *jīva* = χορδή) και κατασκεύασαν σχετικούς πίνακες. Μεταφράζοντας τον όρο *ardhajīva* οι Άραβες αστρονόμοι χρησιμοποίησαν τη λέξη **«jība»**, την οποία έγραφαν συντομογραφικά **«jb»**. Όταν αυτή μεταφράστηκε στα Λατινικά, ο μεταφραστής θεώρησε ότι η συντομογραφία **«jb»** προέρχεται από την αραβική λέξη **«jaib»** η οποία έχει την ίδια σημασία με τη **λατινική «sinus»** και έτσι χρησιμοποίησε την τελευταία για τη μισή χορδή.

«Χάθηκαν στη μετάφραση» σχολίασε ειρωνικά ο Στέφανος.

«Ναι, αλλά υπάρχει κάτι ανεξήγητο» είπε σκεπτικός ο Ηλίας. «Αφού οι αρχαίοι Έλληνες δεν χρησιμοποίησαν καθόλου τη μισή χορδή, πώς δημιουργήθηκε η λέξη ημίτονο;»

«Θα είναι μετάφραση» απάντησε ο Στέφανος. «Αλλά στάσου, μετάφραση από πού; Το **sinus** δεν σημαίνει τη μισή χορδή!».

«Καλύτερα να πάμε αύριο στον Συμεωνίδη, να του πούμε τι βρήκαμε και να μας λύσει τις απορίες» είπε ο Ηλίας που είχε αρχίσει να νυστάζει.

**Το ημίτονο: η προέλευση της λέξης**

Το άλλο μεσημέρι, μετά τη λήξη των μαθημάτων επισκέφτηκαν τη βιβλιοθήκη και έδειξαν στον κύ-

## Το ημίτονο: ανιχνεύοντας την ετυμολογία

ριο Συμεωνίδη τα ευρήματά τους.

«Πάρα πολύ ωραία. Υπάρχουν καθόλου απορίες;»

«Δύο πράγματα είναι αυτά που δεν καταλαβαίνουμε» εξήγησε ο Ηλίας. «Στο Σχήμα 1 το ΔΓ είναι μισή χορδή και σωστά ονομάστηκε ημίτονο, αφού «ημί = μισό» και «τόνος = χορδή». Όμως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΟΔ ημίτονο ονομάζεται ο λόγος  $\frac{\Delta\Gamma}{\Omega\Delta}$  που δεν είναι το ίδιο. Μας μπερδεύει η υποτείνουσα στον παρανομαστή.»

«Αυτό είναι εύκολο και θα το βρείτε μόνοι σας» απάντησε ο κύριος Συμεωνίδης. «Πότε ένα κλάσμα είναι ίσο με τον αριθμητή του;»

«Όταν ο παρανομαστής είναι ίσος με τη μονάδα» απάντησαν σχεδόν ταυτόχρονα ο Ηλίας και ο Στέφανος.

«Έτσι ακριβώς. Στον τριγωνομετρικό κύκλο που σχεδιάσατε, η ακτίνα αποτελεί τη μονάδα μέτρησης και τα ευθύγραμμα τμήματα που μας ενδιαφέρουν υπολογίζονται ως συνάρτηση της ακτίνας.»

«Δηλαδή  $\Omega\Delta = 1$ , οπότε και στο ορθογώνιο τρίγωνο το ημίτονο της γωνίας ΓΟΔ είναι ίσο με το μήκος της ΔΓ.»

«Γι αλλο δεν καταλαβαίνετε;»

«Η άλλη απορία δεν είναι και τόσο μαθηματική» απάντησε κάπως διστακτικά ο Ηλίας. «Αφού οι αρχαίοι Έλληνες δεν χρησιμοποίησαν καθόλου τη μισή χορδή, πώς δημιουργήθηκε η λέξη ημίτονο; Το λατινικό *sinus* δεν σημαίνει μισή χορδή και άρα θα έπρεπε να μεταφραστεί διαφορετικά.»

«Τώρα ανοίγετε ένα δύσκολο ιστορικό ζήτημα. Επειδή βρήκα το θέμα του ημιτόνου ενδιαφέρον, έψαξα και βρήκα στη βιβλιογραφία μια εργασία που παρουσιάστηκε πριν μερικά χρόνια σ' ένα συνέδριο στο Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών.»

«Θα μας τη δώσετε να τη μελετήσουμε;»

«Δεν χρειάζεται να μπλέξετε με πολλές λεπτομέρειες. Θα σας πω μόνο ότι η «μισή χορδή» μεταφράστηκε αρκετές φορές στα Ελληνικά. Την πρώτη φορά στο *Βυζάντιο* έγινε μετάφραση από ένα Αραβικό αστρονομικό έργο, και ο μεταφραστής *Γεώργιος Χιονιάδης* έκανε τότε το ίδιο λάθος όπως ο μεταφραστής στα Λατινικά. Θεώρησε και αυτός ότι η συντομογραφία «*jīb*» προέρχεται από τη λέξη «*jaib*», η οποία σημαίνει διάφορα πράγματα, μεταξύ των οποίων «άνοιγμα ενός ρούχου στο λαιμό ή τον τράχηλο», αυτό που οι μοδίστρες λένε «λαιμόκοψη». Έτσι δημιούργησε τη λέξη «τραχηλαία» για να εκφράσει τη μισή χορδή ενός τόξου.»

«Δηλαδή το ημίτονο στο Βυζάντιο το έλεγαν τραχηλαία και το ήξεραν και οι μοδίστρες σχολίασε με ειρωνική διάθεση ο Στέφανος.

«Όχι μόνο αυτό, ο περίφημος Βησσαρίων το ονόμαζε «κόλπωμα» επειδή το «*jaib*» και το «*sinus*» σημαίνουν επίσης «θαλάσσιος κόλπος». Δείτε αυτή την εικόνα που βρήκα στο διαδίκτυο.»

«Καλά, και το ημίτονο πότε εμφανίστηκε;» ρώτησε ο Ηλίας έκπληκτος από τις νέες πληροφορίες.

«Μη βιάζεσαι. Μια άλλη μετάφραση έγινε επί *Τουρκοκρατίας*, πάλι από τα Λατινικά. Ο μεταφραστής *Χρύσανθος Νοταράς* κατάλαβε ότι το *sinus* δεν έχει καμιά σχέση με τη μισή χορδή, αλλά δεν προσπάθησε να δημιουργήσει μια νέα ελληνική λέξη. Αντίθετα έκανε αυτό που ονομάζουμε εξελληνισμό, δηλαδή όπως λέμε Λονδίνο το *London*, αυτός ονόμασε «*σίνο*» το *sinus*. Στο βιβλίο του γράφει «*Κανόνας των σίνων*» για το «Θεώρημα των ημιτόνων» που θα μάθετε στην επόμενη τάξη. Η λέξη ημίτονο εμφανίζεται για πρώτη φορά στο βιβλίο *Οδός Μαθηματικής* που έγραψε ο *Μεθόδιος Ανθρακίτης*, επίσης την περίοδο της Τουρκοκρατίας.»

Όλα τα προηγούμενα άρχισαν να εξάπτουν την περιέργεια και τη φαντασία των δύο μαθητών, που ετοιμάστηκαν να βομβαρδίσουν τον κύριο Συμεωνίδη με ερωτήσεις για τον Χιονιάδη, τον Νοταρά τον Βησσαρίωνα και τον Ανθρακίτη. Ο τελευταίος όμως αποφάσισε να οδηγήσει αλλού τη συζήτηση.

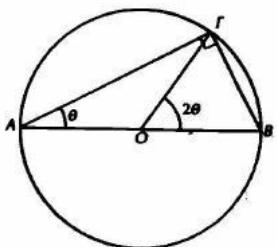
### Το ημίτονο: ο όρος και η έννοια

«Είναι καιρός να γυρίσουμε στο μαθηματικό μέρος του ζητήματος. Όπως δείξατε πολύ καλά στο Σχήμα 1, το ημίτονο ενός τόξου ισούται με το μισό της χορδής των διπλάσιων τόξου. Επειδή τα τόξα ενός κύκλου

## Το ημίτονο: ανιχνεύοντας την ετυμολογία

αντιστοιχούν σε επίκεντρες και εγγεγραμμένες γωνίες, μπορούμε να μιλάμε επίσης για ημίτονο γωνίας.

Σχεδίασε σε ένα χαρτί το επόμενο σχήμα:



Σχήμα 3

«Τώρα θα σας εξηγήσω και μερικά πράγματα από το επόμενο κεφάλαιο του βιβλίου Μαθηματικών. Στο Σχήμα 3 η γωνία BOG ονομάζεται επίκεντρη που βαίνει στο τόξο BG και η BAB αντίστοιχη εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο. Η επίκεντρη είναι διπλάσια της αντίστοιχης εγγεγραμμένης και για το λόγο αυτό η εγγεγραμμένη γωνία AGB είναι ορθή, επειδή ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης AOB που είναι ευθεία γωνία».

«Πανεύκολο, αφού το μισό των 180 μοιρών είναι 90 μοίρες» σχολίασε ο Στέφανος.

«Ακριβώς. Αν λοιπόν μια γωνία BOG = 2θ γίνει επίκεντρη σε κύκλο με κέντρο O και διάμετρο AB = 2R, όπως στο Σχήμα 2, τότε το τρίγωνο AGB είναι ορθογώνιο και έχει την οξεία BAB = θ. Από το τρίγωνο αυτό διαπιστώνουμε αμέσως τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο ημίτονο της γωνίας θ και τη χορδή της διπλάσιας γωνίας 2θ».

Ο κύριος Συμεωνίδης έγραψε σε ένα φύλλο χαρτί το μαθηματικό τύπο:

$$\eta\mu\theta = \frac{GB}{AB} = \frac{\text{χορδή}2\theta}{2R} \quad (1)$$

«Αν επιλέξουμε κύκλο με μοναδιαία ακτίνα, δηλαδή R = 1, τότε διαπιστώνουμε αμέσως από την προηγούμενη σχέση ότι το ημίτονο μιας γωνίας θ ισούται με τη μισή χορδή της διπλάσιας γωνίας 2θ, Υπάρχει κάτι που δεν καταλαβαίνετε;».

Ο Ήλιας και ο Στέφανος, αφού εξέτασαν προσεκτικά το Σχήμα 2 και τη σχέση (1), διαβεβαίωσαν τον κύριο Συμεωνίδη ότι δεν είχαν καμιά απορία.

### Ο πίνακας του Πτολεμαίου

«Λοιπόν, τώρα σας έχω μια έκπληξη. Βρήκα στο διαδίκτυο μια εικόνα που περιέχει την πρώτη και την τελευταία σελίδα του πίνακα χορδών του Πτολεμαίου».

Ανοιξε στην επιφάνεια εργασίας του υπολογιστή ένα αρχείο jpg και στην οθόνη εμφανίστηκε η επόμενη εικόνα:

Κανόνιον τῶν ἐν τοῖς κύκλῳ εὐθεῶν		Table of Chords			
επιρροής	εὐθεῶν	ἀρχιμοτοῦν	απο-	σημεῖος	σύντικός
ζ	τελεῖα	τελεῖα	1°	0.99515	0; 1, 2, 50
α	περὶ τὸ	περὶ τὸ	2°	0.98510	0; 1, 2, 50
αριθμόν	περὶ τὸ	περὶ τὸ	3°	0.97056	0; 1, 2, 50
β	περὶ τὸ	περὶ τὸ	4°	0.95105	0; 1, 2, 50
γ	περὶ τὸ	περὶ τὸ	5°	0.92791	0; 1, 2, 50
δ	περὶ τὸ	περὶ τὸ	6°	0.89100	0; 1, 2, 50
ε	περὶ τὸ	περὶ τὸ	7°	0.84147	0; 1, 2, 50
ζ'	περὶ τὸ	περὶ τὸ	8°	0.78127	0; 1, 2, 50
α'	περὶ τὸ	περὶ τὸ	9°	0.71060	0; 1, 2, 50
αριθμόν	περὶ τὸ	περὶ τὸ	10°	0.62838	0; 1, 2, 50
β'	περὶ τὸ	περὶ τὸ	11°	0.53573	0; 1, 2, 50
γ'	περὶ τὸ	περὶ τὸ	12°	0.43262	0; 1, 2, 50
δ'	περὶ τὸ	περὶ τὸ	13°	0.31915	0; 1, 2, 50
ε'	περὶ τὸ	περὶ τὸ	14°	0.19510	0; 1, 2, 50
ζ''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	15°	0.05140	0; 1, 2, 50
α''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	16°	-0.19510	0; 1, 2, 50
αριθμόν	περὶ τὸ	περὶ τὸ	17°	-0.31915	0; 1, 2, 50
β''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	18°	-0.43262	0; 1, 2, 50
γ''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	19°	-0.53573	0; 1, 2, 50
δ''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	20°	-0.62838	0; 1, 2, 50
ε''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	21°	-0.71060	0; 1, 2, 50
ζ'''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	22°	-0.78127	0; 1, 2, 50
α'''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	23°	-0.84147	0; 1, 2, 50
αριθμόν	περὶ τὸ	περὶ τὸ	24°	-0.89100	0; 1, 2, 50
β'''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	25°	-0.92791	0; 1, 2, 50
γ'''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	26°	-0.95105	0; 1, 2, 50
δ'''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	27°	-0.97056	0; 1, 2, 50
ε'''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	28°	-0.98510	0; 1, 2, 50
ζ''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	29°	-0.99515	0; 1, 2, 50
α''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	30°	-1.00000	0; 1, 2, 50
αριθμόν	περὶ τὸ	περὶ τὸ	31°	-0.99515	0; 1, 2, 50
β''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	32°	-0.98510	0; 1, 2, 50
γ''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	33°	-0.97056	0; 1, 2, 50
δ''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	34°	-0.95105	0; 1, 2, 50
ε''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	35°	-0.92791	0; 1, 2, 50
ζ'''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	36°	-0.89100	0; 1, 2, 50
α'''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	37°	-0.84147	0; 1, 2, 50
αριθμόν	περὶ τὸ	περὶ τὸ	38°	-0.78127	0; 1, 2, 50
β'''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	39°	-0.71060	0; 1, 2, 50
γ'''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	40°	-0.62838	0; 1, 2, 50
δ'''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	41°	-0.53573	0; 1, 2, 50
ε'''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	42°	-0.43262	0; 1, 2, 50
ζ''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	43°	-0.31915	0; 1, 2, 50
α''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	44°	-0.19510	0; 1, 2, 50
αριθμόν	περὶ τὸ	περὶ τὸ	45°	0.05140	0; 1, 2, 50
β''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	46°	0.19510	0; 1, 2, 50
γ''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	47°	0.31915	0; 1, 2, 50
δ''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	48°	0.43262	0; 1, 2, 50
ε''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	49°	0.53573	0; 1, 2, 50
ζ'''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	50°	0.62838	0; 1, 2, 50
α'''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	51°	0.71060	0; 1, 2, 50
αριθμόν	περὶ τὸ	περὶ τὸ	52°	0.78127	0; 1, 2, 50
β'''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	53°	0.84147	0; 1, 2, 50
γ'''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	54°	0.89100	0; 1, 2, 50
δ'''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	55°	0.92791	0; 1, 2, 50
ε'''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	56°	0.95105	0; 1, 2, 50
ζ'''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	57°	0.97056	0; 1, 2, 50
α'''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	58°	0.98510	0; 1, 2, 50
αριθμόν	περὶ τὸ	περὶ τὸ	59°	0.99515	0; 1, 2, 50
β'''''''	περὶ τὸ	περὶ τὸ	60°	1.00000	0; 1, 2, 50

Η 1<sup>η</sup> και η τελευταία σελίδα του πίνακα χορδών του Πτολεμαίου

«Τι βλέπουμε εδώ;» ρώτησε ο κύριος Συμεωνίδης.

«Αριστερά ή δεξιά;» ρώτησε ο Στέφανος. «Αριστερά δεν καταλαβαίνω τίποτε, αλλά δεξιά μοιάζει με τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών του βιβλίου».

«Να τα βάλουμε σε μία σειρά» είπε ο κύριος Συμεωνίδης. «Ο Πτολεμαίος, επειδή χρησιμοποιούσε το εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης, επέλεξε έναν κύκλο με ακτίνα R=60. Πώς γίνεται στην περίπτωση αυτή ο τύπος που έγραψα προηγουμένως;»

Ο Στέφανος, κοιτώντας προσεκτικά τον τύπο (1) έγραψε από κάτω:

$$\eta\mu\theta = \frac{\text{χορδή}2\theta}{120} \quad (2)$$

«Οι αριθμοί στον πίνακα του Πτολεμαίου» συνέχισε ο κύριος Συμεωνίδης «είναι γραμμένοι σύμφωνα με το αρχαιοελληνικό σύστημα αρίθμησης, δηλαδή  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\zeta = 7$ ,  $\iota = 10$ ,  $\iota\alpha = 11$  κ.ο.κ. Η πρώτη στήλη του πίνακα περιέχει τις τιμές των τόξων σε μοίρες και η δεύτερη στήλη τα μήκη των αντίστοιχων χορδών με μονάδα μέτρησης την ακτίνα που αποδιαιρείται σύμφωνα με το εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης σε 60 πρώτα, κάθε πρώτο σε 60 δεύτερα και κάθε δεύτερο σε 60 τρίτα. Ο πίνακας περιέχει συνολικά τα μήκη των χορδών όλων των τόξων που αυξάνονται διαδοχικά ανά μισή μοίρα, από το

---

### Το ημίτονο: ανιχνεύοντας την ετυμολογία

---

τόξο μισής μοίρας μέχρι το τόξο 180 μοιρών».

«Πώς μέτρησε τόσο μικρές χορδές με τέτοια ακρίβεια» αναφωτήθηκε ο Ηλίας.

«Και μάλιστα χρησιμοποιώντας την ακτίνα ως χάρακα» έσπενσε να συμπληρώσει ο Στέφανος.

«Τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά» απάντησε ο κύριος Συμεωνίδης. «Δεν υπήρχε καμιά μέτρηση όπως αυτή που εννοείτε. Ο Πτολεμαίος χρησιμοποίησε πολλά θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ένα από τα οποία είναι το Πυθαγόρειο θεώρημα που ήδη γνωρίζετε, και με τη βοήθειά τους υπολόγισε τα μήκη των χορδών με τις υποδιαιρέσεις της ακτίνας. Στην πράξη οι αστρονόμοι ενδιαφέρονταν να βρίσκουν με όσο γίνεται μεγαλύτερη ακρίβεια το μήκος της χορδής ενός γνωστού τόξου και αντίστροφα: από το μήκος της χορδής να βρίσκουν το αντίστοιχο τόξο. Για να ελέγχουμε την ακρίβεια του πίνακα, θα εξετάσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Διάβασε Ηλία από τον πίνακα το μήκος της χορδής του τόξου των ζ μοιρών».

Ο Ηλίας, αφού βεβαιώθηκε το ζ είναι το 7, εντόπισε γρήγορα στην 14<sup>η</sup> γραμμή του πίνακα το μήκος της χορδής του τόξου 7 μοιρών ίσο με 7 πρώτα 19 δεύτερα και 33 τρίτα της ακτίνας.

«Αυτόν τον αριθμό θα τον καταλάβουμε καλύτερα αν μετατραπεί στο δεκαδικό σύστημα αριθμητικής» εξήγησε ο κύριος Συμεωνίδης.

Έκανε γρήγορα κάποιες πράξεις στην αριθμομηχανή των Windows του υπολογιστή και έγραψε:

$$7 + \frac{19}{60} + \frac{33}{3600} = 7,3258333\dots$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον τύπο (2) για τη σχέση ημιτόνου και χορδής υπολόγισε με τη βοήθεια της αριθμομηχανής ότι:  $\eta\mu3,5^\circ = \frac{\text{χορδή}^7}{120} = \frac{7,3258333\dots}{120} = 0,0610486108333\dots$

«Τώρα θέλω εσείς να συγκρίνετε αυτό το αποτέλεσμα με εκείνο που δίνει ο πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών του βιβλίου σας».

Ο Ηλίας έβγαλε γρήγορα το βιβλίο Μαθηματικών από την τσάντα, το άνοιξε στην τελευταία σελίδα όπου υπήρχε ο πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών και άρχισε να ψάχνει.

«Δεν έχει το ημίτονο της γωνίας 3,5 μοιρών» ψιθύρισε μάλλον απογοητευμένος. «Από το ημίτονο 3 μοιρών που είναι ίσο με 0,0523 πηγαίνει κατευθείαν στο ημίτονο 4 μοιρών που είναι ίσο με 0,0698».

«Στη μέση αυτών των δύο θα βρίσκεται το ημίτονο 3,5 μοιρών» συμπλήρωσε ο Στέφανος. «Νομίζω ότι πέφτει κοντά σε αυτό που βρήκαμε».

«Αυτό δεν είναι ακρίβεια» αντέδρασε ο Ηλίας. «Θα το υπολογίσω με το πλήκτρο  στο κομπιουτεράκι του υπολογιστή. Εκεί μπορώ να βάλω όποιον αριθμό θέλω και μου δίγει απάντηση με πολλά δεκαδικά ψηφία».

Σε λίγα δευτερόλεπτα εμφανίστηκε στην οθόνη της αριθμομηχανής το αποτέλεσμα:

$$\eta\mu3,5^\circ = 0,06104853953485687203667013038475$$

«Έχει ίδια τα 6 πρώτα δεκαδικά ψηφία με τον αριθμό που βρέθηκε από τον πίνακα του Πτολεμαίου» φώναξε ενθουσιασμένος ο Ηλίας. «Σχεδόν συμπίπτουν».

«Δηλαδή ο αρχαίος πίνακας χορδών είναι πιο ακριβής από τον πίνακα ημιτόνων του βιβλίου;» ρώτησε ο Στέφανος.

«Εγώ θέλω τώρα να μας δείξετε ένα αστρονομικό πρόβλημα που έλυσε ο Πτολεμαίος χρησιμοποιώντας τον πίνακα χορδών» συνέχισε ο Ηλίας.

«Με τις γνώσεις Μαθηματικών που έχετε αυτό δεν είναι εύκολο. Ήδη έχετε μάθει πολύ ενδιαφέροντα πράγματα» είπε ο κύριος Συμεωνίδης. «Εγώ λέω ότι είναι ώρα να τελειώσουμε και να γυρίσετε στο σπίτι. Η ώρα πέρασε και οι δικοί σας θα ανησυχούν».

Ο Στέφανος είχε ένα τελευταίο, κρίσιμο ερώτημα.

«Αν πούμε αυτά που μάθαμε στο κύριο Ευσταθίου, υπάρχει περίπτωση να μας βάλει μεγαλύτερο βαθμό στο δεύτερο τρίμηνο;»

«Να ζητήσετε να γράψετε μια ερευνητική εργασία στο μάθημα των Μαθηματικών με αυτό το θέμα. Να βρείτε έναν καλό τίτλο και να το προτείνετε αύριο κιόλας. Θα του μιλήσω και εγώ αν χρειαστείν».

Ο Ηλίας και ο Στέφανος ευχαρίστησαν τον κύριο Συμεωνίδη και έφυγαν από τη βιβλιοθήκη γεμάτοι σχέδια.

«Σκέφτηκα έναν ωραίο τίτλο για την εργασία» ανακοίνωσε ο Ηλίας καθώς βάδιζαν για το σπίτι. «Θα την ονομάσουμε Λύνοντας το μυστήριο του ημιτόνου».

«Αυτό μοιάζει με αστυνομική ιστορία» σχολίασε ο Στέφανος. Εγώ σκέφτηκα έναν καλύτερο τίτλο: *Η μάχη της χορδής με το ημίτονο*.

«Αυτό μοιάζει με κινηματογραφική ταινία. Η εργασία θα χάσει τη σοβαρότητά της».

## Το ημίτονο: ανιχνεύοντας την ετυμολογία

Ο Στέφανος προτίμησε να μην απαντήσει. Όταν έφτασαν στην είσοδο της πολυκατοικίας έκανε μια πρόταση.

«Συμφωνώ ότι αν πάμε στον Ευσταθίου με τέτοιους τίτλους μπορεί να μη μας πάρει στα σοβαρά. Προτείνω να του μιλήσουμε αύριο για τις απορίες που είχαμε και την έρευνα που κάναμε. Αν δεχθεί να κάνουμε την εργασία και να μετρήσει ο βαθμός για το δεύτερο τρίμηνο, τότε ξεκινάμε το γράψιμο αμέσως. Μπορούμε να τελειώσουμε και μέσα στο Σαββατοκύριακο».

«Ωραία πρόταση!» συμφώνησε αμέσως ο Ηλίας. «Το βράδυ να συνεννοηθούμε πως ακριβώς θα παρουσιάσουμε την ιδέα στον Ευσταθίου».

### Ένα project για ολόκληρο το τμήμα

Ο κύριος Ευσταθίου άκουσε την άλλη μέρα με πολύ ενδιαφέρον όσα του διηγήθηκαν ο Ηλίας και ο Στέφανος, στη διάρκεια δύο διαλειμμάτων. Από το ύφος του ήταν φανερό ότι άκουγε πρώτη φορά όλες αυτές τις συναρπαστικές λεπτομέρειες για την ιστορία του ημιτόνου.

«Όλα αυτά είναι πολύ ενδιαφέροντα και σας συγχαίρω για την προσπάθεια. Αλλά για να θεωρηθεί ότι έγινε στο πλαίσιο του μαθήματος και να αξιολογηθεί, θα πρέπει να ενταχθεί μέσα σε ένα πρόγραμμα ερευνητικών εργασιών στις οποίες συμμετέχουν όλοι οι μαθητές του τμήματος σας. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμη με ένα ωριαίο διαγώνισμα, ίσως και περισσότερο».

«Οι περισσότεροι βαριούνται κύριε να κάνουν τέτοιες εργασίες. Θα προτιμήσουν το διαγώνισμα!» σχολίασε ο Στέφανος.

«Αυτό αφήστε το σε μένα. Λοιπόν θα εφαρμόσουμε το εξής σχέδιο. Αύριο θα ανακοινώσω στο τμήμα τις απορίες που είχατε για το ημίτονο και ότι αρχίσατε να ερευνάτε το ζήτημα. Στην Τριγωνομετρία όμως, εκτός από το ημίτονο, υπάρχουν το συνημίτονο και η εφαπτομένη. Υπάρχουν ακόμη η συνεφαπτομένη, η τέμνουσα, και η συντέμνουσα, που δεν περιλαμβάνονται στη ύλη σας αλλά είναι παρόμοια. Θα ζητήσω να χωριστεί το τμήμα σε τριμελείς ομάδες. Δύο ομάδες θα μελετήσουν την πρόσλευση των υπόλοιπων τριγωνομετρικών αριθμών που ανέφερα. Τρεις άλλες ομάδες θα συλλέξουν στοιχεία για τον Πτολεμαίο, τον Χιονιάδη, τον Βησσαρίωνα, τον Νοταρά, τον Ανθρακίτη και άλλους επιστήμονες που ασχολήθηκαν με την Τριγωνομετρία και τις εφαρμογές της. Δύο άλλες ομάδες θα συγκεντρώσουν προβλήματα πρακτικών εφαρμογών της Τριγωνομετρίας. Υπάρχουν άπειρες. Θα δημιουργηθεί επίσης μια ομάδα τεχνικής υποστήριξης που θα κάνει τα σχήματα στον υπολογιστή και θα επιμεληθεί ένα τεύχος με τις εργασίες όλων των ομάδων. Εσείς οι δύο θα αναλάβετε, τιμής ένεκεν και ως γνώστες του θέματος, το ρόλο των βοηθών μου στην παρακολούθηση και το συντονισμό όλων των ομάδων. Είναι ένα project για ολόκληρο το τμήμα».

«Θα προλάβουμε κύριε να το τελειώσουμε μέσα στο δεύτερο τρίμηνο;» ρώτησε κάπως προβληματισμένος ο Ηλίας.

«Κανείς δεν μας εμποδίζει να το επεκτείνουμε και στο τρίτο τρίμηνο. Θα το δηλώσω στον Διευθυντή ως ανάθεση εκπόνησης ερευνητικής εργασίας στο μάθημα των Μαθηματικών, και θα μετρήσει επίσημα στην αξιολόγησή σας. Τσως οργανώσουμε στο τέλος της χρονιάς και μια ημερίδα παρουσίασης, στην οποία θα προσκαλέσουμε τους γονείς και το σχολικό σύμβουλο. Λοιπόν να φέρετε αύριο μαζί σας το υλικό που έχετε συγκεντρώσει να το δείξουμε και στους υπόλοιπους».

Ο Ηλίας και ο Στέφανος έφυγαν εκείνη τη μέρα από το σχολείο με ενθουσιασμό, και συναίσθηση ότι τους είχε ανατεθεί ένα πολύ σοβαρό έργο.

### Επιμύθιο

Στην επιστημονική ορολογία παρατηρούμε αρκετές φορές την ύπαρξη μιας ασυμφωνίας ανάμεσα στην ετυμολογία ενός όρου και τη σημασία του, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο ορίζεται η αντίστοιχη έννοια. Στις Φυσικές Επιστήμες το φαινόμενο αυτό οφείλεται συχνά στη διαφορετική χρήση του συγκεκριμένου όρου ή της αντίστοιχης έννοιας στην καθημερινή ζωή και την επιστήμη. Π.χ.: κάθε μαθητής, πριν αρχίσει ακόμη το σχολείο, έχει αποκτήσει από την καθημερινή εμπειρία μια αντίληψη για τον όρο «δύναμη» που δεν είναι εύκολα συμβατή με τον ορισμό της αντίστοιχης έννοιας στο μάθημα της Φυσικής. Στα Μαθηματικά η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη, επειδή τις περισσότερες φορές ο όροι που χρησιμοποιούνται, όπως διαμορφώθηκαν με το πέρασμα των χρόνων, όχι μόνο δεν έχουν κάποιο άμεσο αντίκρισμα στην καθημερινή ζωή, αλλά ούτε και με την έννοια την οποία εκφράζουν. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί, που εμφανίζονται για πρώτη φορά στους μαθητές του Γυμνασίου, ως λόγοι μεταξύ των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, αποτελούν μια τέτοια χαρακτηριστική περίπτωση. Η μελέτη της ετυμολογίας και της προέλευσης των επιστημονικών όρων αποτελεί ένα συναρπαστικό πεδίο έρευνας που μπορεί να συμβάλει αποφασιστικά στην εννοιολογική κατανόησή τους.